WACHSTUMSPROZESSE

- *Hinweis*: Statt von der **Wachstumsrate** $f'(t)$ spricht man auch von der **Wachstumsgeschwindigkeit** oder von der **Änderungsrate**.

LINEARES WACHSTUM

Das einfachste Wachstumsmodell! Hier ist die Wachstumsrate **konstant**:

$$f'(t) = k \rightarrow \frac{dy}{dt} = k \rightarrow dy = k\,dt \rightarrow \int dy = \int k\,dt \rightarrow y = f(t) = k \cdot t + c$$

also eine **lineare Funktion**.

EXPONENTIELLES WACHSTUM

Beim *exponentiellen Wachstum* ist die Wachstumsrate *f '(t)* **proportional** zum aktuellen Bestand *f(t)*:

$$f'(t) \propto f(t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = ky \rightarrow \frac{1}{y}dy = kdt$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int kdt \rightarrow \ln(y) = kt + c$$

$$\rightarrow y = e^{kt} \cdot e^{c} = A \cdot e^{kt}$$

BESCHRÄNKTES WACHSTUM I

- Beim *beschränkten Wachstum* gibt es eine sog. **Sättigungsgrenze** G
  - z. B. die zur Verfügung stehende Kapazität.
- Der Bestand $f(t)$ nähert sich immer mehr der oberen Grenze G
- Dann gilt aber: $f'(t) \to 0$ (Warum?)
- Folgerung: die Differenz $(G - f(t))$ wird immer kleiner
- Die Änderungsrate $f'(t)$ ist also proportional zu $(G - f(t))$ → $f'(t) \propto (G - f(t))$

BESCHRÄNKTES WACHSTUM II

- DGL des beschränkten Wachstums:
- $f'(t) = r \cdot (G - f(t))$ mit r $\in \mathbb{R}^+$.
- *Lösungen* dieser DGL: $f(t) = G + a \cdot e^{-kt}$ mit k > 0.
- Mit dem Anfangswert $f(0)$ ergibt sich:

  $f(t) = G + (f(0) - G) \cdot e^{-kt}$ mit k > 0.

LOGISTISCHES WACHSTUM I

Ein für viele Wachstumsprozesse besseres Modell des beschränkten Wachstums erhält man, wenn man davon ausgeht, dass die Wachstumsrate $f'(t)$ sowohl

- proportional zum Bestand f(t) → $f'(t) \propto f(t)$ als auch
- proportional zu G - f(t) → $f'(t) \propto G - f(t)$ ist.

LOGISTISCHES WACHSTUM II

Die DGL lautet also:

- $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (G - f(t)) = k \cdot G \cdot f(t) - k \cdot [f(t)]^2$ mit $t \in \mathbb{R}$
- DGL beschreibt das sog. **logistische Wachstum**
- Die Lösungen nennt man *logistische Funktionen*
  - mit der charakteristischen **S-Form**

LOGISTISCHES WACHSTUM III

Die **Lösungsfunktion**

- f(t) = $\frac{G}{1 + e^{-kGt} \cdot (\frac{G}{a} - 1)}$

enthält den Anfangswert *a* zum Zeitpunkt t=0, also *a* = *f(0)*

LINKS

- Wachstumsprozesse von G. Roolfs
- Wachstumsprozesse → Präsentation von G. Roolfs
- Wachstumsprozesse: Mathematisches Modell
  (Mathematik für Chemiker, Uni Paderborn, 2008/2009)

ENDE

- Präsentation erstellt mit Reveal.js

→ sp, 2018-01-30